第 2 章 補論 数学トピック(1) 自然対数について

0. 高校数学の復習：対数（logarithm）とは？

$$4^2 = 16 \quad \Leftrightarrow \quad \log_4 16 = 2$$
$$2^3 = 8 \quad \Leftrightarrow \quad \log_2 8 = 3$$

$$\log_{2} 8$$

対数の「底（てい）」と言う.

すなわち，「a を底とする b の対数 $\log_a b$」とは，「a を何乗したら b になりますか」という問いに対する答えである.

$$\log_4 1 = 0$$

1. 自然対数（natural logarithm）について

次のように定義される<u>ネイピア数</u>というものがある.

$$e = \lim_{m \to \infty}\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = 2.71828\ldots$$

このネイピア数 e を底とする対数を「自然対数（natural logarithm）」と言い「$\ln(\ )$」と表記する（「$\log_e(\ )$」とは書かないことに注意）.[5]

なぜ e を底とする対数に注目するのか？
それは，次のような便利な性質を持っているから.

> x が非常に小さい値のとき（x が 0 に近いとき）
>
> $$\ln(1 + x) \approx x$$

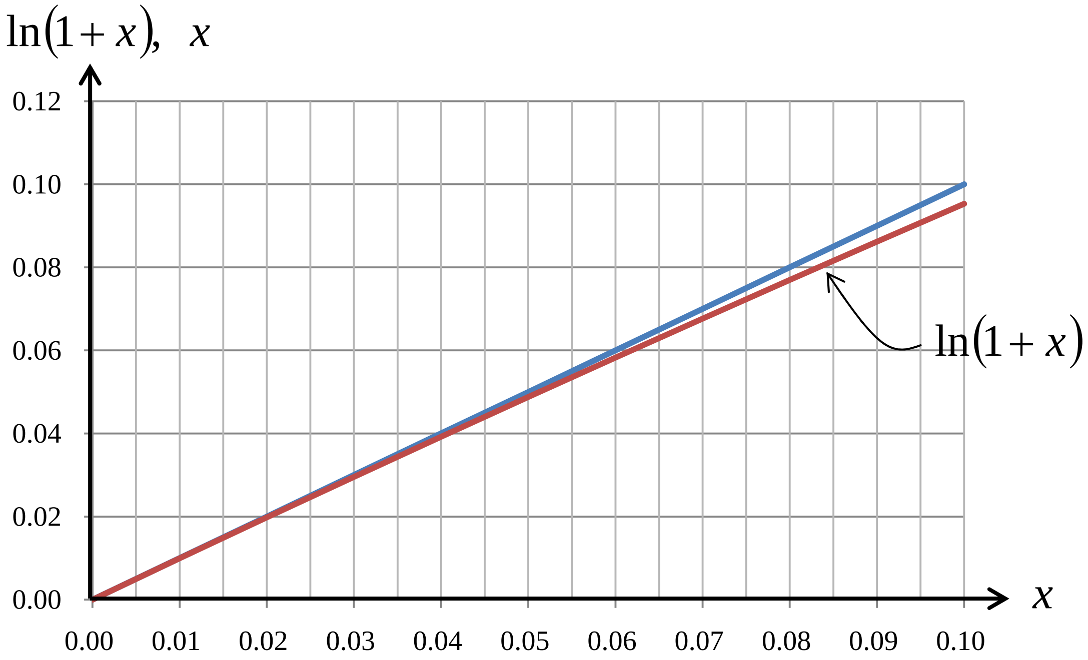
[5] 厳密にはこの定義は正しくない．本来，先に自然対数があり，後からこれが e を底とする対数に等しいことが証明された.

実際にxに数値を入れて確かめてみよう．

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04
$\ln(1+x)$	0	0.00995	0.01980	0.02956	0.03922
誤差	0	0.00005	0.00020	0.00044	0.00078

x	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.10
$\ln(1+x)$	0.04879	0.05827	0.06766	0.07696	0.08618	0.09531
誤差	0.00121	0.00173	0.00234	0.00304	0.00382	0.00469

$x=0.04$くらいまではほとんど誤差がない．
$x=0.04$を超えても，誤差は全体の 5 パーセント程度に収まっているので，$\ln(1+x)$の近似値としてxが十分使えることがわかる．



このことは，より厳密には，関数$\ln(1+x)$を$x=0$の付近で 1 次のテーラー展開[6]をすることで確かめることができる．

[6] テーラー展開について知りたい場合は，たとえば小島寛之『ゼロから学ぶ微分・積分』(講談社)，あるいは A.C.チャン『現代経済学の数学基礎』(シーエーピー出版) 参照．前者は明学図書館にないので，入れてもらいます．

2. 対数に関するいくつかの公式

公式 1　$\log_a x^K = K \log_a x$

公式 2　$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$

公式 3　$\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

公式 1 の証明：

まず,

$$\log_a x = b$$

とおく.

これは，次のことを意味している.

$$x = a^b$$

両辺を K 乗すると,

$$\begin{aligned} x^K &= \left(a^b\right)^K \\ &= a^{bK} \end{aligned}$$

最後の式 $x^K = a^{bK}$ は次のことを意味している.

$$\log_a x^K = bK = K \log_a x$$

公式 2 の証明：

a, b, c, x, y の間に次のような関係があるとする.

$$a^b = x \quad \Leftrightarrow \quad \log_a x = b$$
$$a^c = y \quad \Leftrightarrow \quad \log_a y = c$$

即座に次のことがわかる.

$$\begin{aligned} xy &= a^b a^c \\ &= a^{b+c} \end{aligned}$$

最後の式は，次の関係を示唆している.

$$\begin{aligned} \log_a xy &= b + c \\ &= \log_a x + \log_a y \end{aligned}$$

公式 3 の証明：

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a xy^{-1}$$

公式 2 を用いる.

$$= \log_a x + \log_a y^{-1}$$

公式 1 を用いる.

$$= \log_a x - \log_a y$$

3. 為替レートの決定式の導出

自然対数の近似と公式 1〜3 を用いると，数学的にはより厳密に為替レートの決定式を導くことができる.

まず，以下を確認.

・1 円を円資産に投資した場合の 1 年後の受け取り総額　$1+i$ 円

・1 円をドル資産に投資した場合の 1 年後の受け取り総額　$(1+i^*)\frac{e_1}{e_0}$ 円

・この両者が等しくなるように円＝ドル・レートが決まる.

$$1+i = (1+i^*)\frac{e_1}{e_0}$$

両辺の自然対数をとる.

$$\ln(1+i) = \ln\left[(1+i^*)\frac{e_1}{e_0}\right]$$

公式 2 を用いる.

$$\ln(1+i) = \ln(1+i^*) + \ln\frac{e_1}{e_0}$$

$$\ln(1+i) = \ln(1+i^*) + \ln\left(\frac{e_1 - e_0 + e_0}{e_0}\right)$$

$$\ln(1+i) = \ln(1+i^*) + \ln\left(1 + \frac{e_1 - e_0}{e_0}\right)$$

$\frac{e_1 - e_0}{e_0}$ を s と置き換える（書き換える）.

$$\ln(1+i) = \ln(1+i^*) + \ln(1+s)$$

左辺は，i が十分小さいならば次のように近似することができる.

$\ln(1+i) \approx i$

同様に，右辺第 1 項・第 2 項ともに，i^* および s が十分小さければ次のように近似することができる.

第 1 項　$\ln(1+i^*) \approx i^*$

第 2 項　$\ln(1+s) \approx s$

以上より，

$$
\begin{aligned}
1+i &= (1+i^*)\frac{e_1}{e_0} \\
\ln(1+i) &= \ln(1+i^*)+\ln(1+s) \\
i &= i^*+s \\
i &= i^*+\frac{e_1-e_0}{e_0}
\end{aligned}
$$

s を $\frac{e_1-e_0}{e_0}$ に戻す.

4. おまけ :「自然対数値の差」と「変化率」

2008 年度の GDP を Y_0，2009 年度のそれを Y_1 としよう.

この 1 年間の成長率を g とすると，Y_0 と Y_1 の間には次の関係が成立している.

$$(1+g)Y_0 = Y_1$$

この式は，次のように変形できる.

$$1+g=\frac{Y_1}{Y_0}$$

両辺の自然対数をとると

$$
\begin{aligned}
\ln(1+g) &= \ln\frac{Y_1}{Y_0} \\
\ln(1+g) &= \ln Y_1 - \ln Y_0
\end{aligned}
$$

ここで，g が十分に小さいならば（通常 GDP の成長率は大きくても 7%（g=0.07）程度である），左辺は次のように近似することができる.

$$\ln(1+g) \approx g$$

よって，

$$
\begin{aligned}
\ln(1+g) &= \ln Y_1 - \ln Y_0 \\
g &= \ln Y_1 - \ln Y_0
\end{aligned}
$$

すなわち，GDP の成長率は，GDP の自然対数値の差として計算することもできるのである.
GDP に限らず，時間とともに成長する変数については，その<u>変化率を自然対数値の差として計算することが可能</u>である.