

国際政治経済システム学 2007 年度

第 2 回 モデル分析入門

付録：関数と微分の基礎

担当 岩村 英之

1 関数

関東地方では、たとえばテレビチャンネルの 1 番は NHK 総合に、4 番は日本テレビに、8 番はフジテレビにという具合に、チャンネル番号と放送局とが対応付けられています。このように、あ

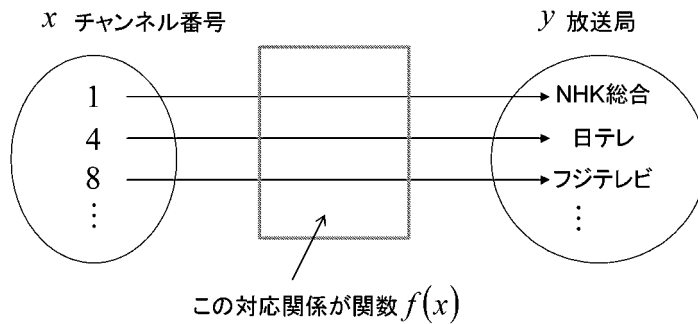


図 1

る集合の要素 x (テレビチャンネル) とある集合の要素 y (放送局) とを対応させるルールのことを関数と言い、“ $f(x)$ ”と書きます。

x も y もともに数値であるような場合は、図 2 のようになります。この関数 $f(x)$ は、 x の値に

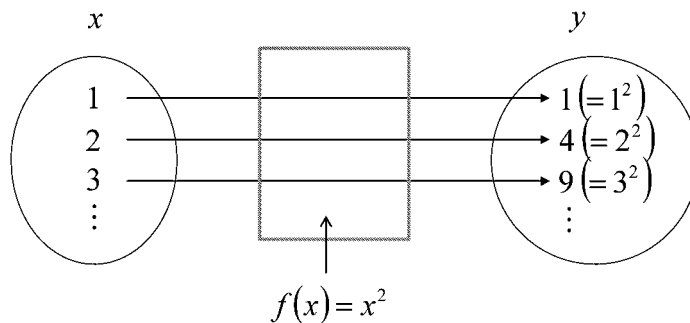


図 2

対してその二乗 x^2 を対応させています。したがって、 $f(x) = x^2$ と表します。

次の例を見てみましょう。

$$x = 1 \rightarrow y = 4 + 2 \times 1 = 6$$

$$x = 2 \rightarrow y = 4 + 2 \times 2 = 8$$

$$x = 3 \rightarrow y = 4 + 2 \times 3 = 10$$

⋮

ここでは、対応関係 $f(x)$ は、 x の値に対してその2倍に4を足した $4 + 2x$ を対応させています。したがって、関数は $f(x) = 4 + 2x$ と表すことができます。

2 関数の微分

関数 $f(x)$ の微分とは、「 x がほんのわずかに増えたとき $f(x)$ にしたがって y がどれだけ変化するか」です。視覚的には、微分は グラフを書いたときの接線の傾き で表されます。

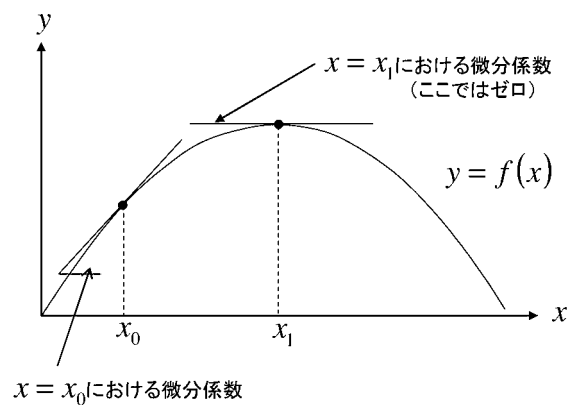


図 3

微分は、 $f'(x)$ や $df(x)/dx$ などと表記されます。

微分は、 x の値によらず一定の場合もあれば、 x の値が変われば微分も変化する場合があります。図 3 の例では、どの x で計算するかによって微分係数は変わってきます。ある特定の x (たとえば x_0) における微分係数を表すとき

$$f'(x_0), \quad \frac{df(x_0)}{dx}, \quad \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0}$$

などと表記します。

2.1 微分係数の計算

ある関数 $f(x)$ の微分を計算する基本的なやり方は、以下の3つです.

$$\begin{aligned}f(x) = a &\longrightarrow \frac{df(x)}{dx} = 0 \\f(x) = bx &\longrightarrow \frac{df(x)}{dx} = b \\f(x) = x^c &\longrightarrow \frac{df(x)}{dx} = cx^{c-1}\end{aligned}$$

計算例

- $f(x) = 5 - 3x \implies f'(x) = -3$
- $f(x) = x^2 - 7x + 10 \implies f'(x) = 2x - 7$
- $f(x) = 3x^4 - 5x^2 - 2x + 7 \implies f'(x) = 12x^3 - 10x - 2$
- $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \implies f'(x) = -\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$

2.2 合成関数の微分

関数 $y = f(x)$ から y の値が決まり、さらに関数 $z = g(y)$ から z が決まるような対応関係を考えてみましょう (図4). このように、 x と z の間をふたつの対応関係が中継するとき、 $z = g(f(x))$ と書きます. また、ふたつの関数を合わせているという意味で、**合成関数**と言います.

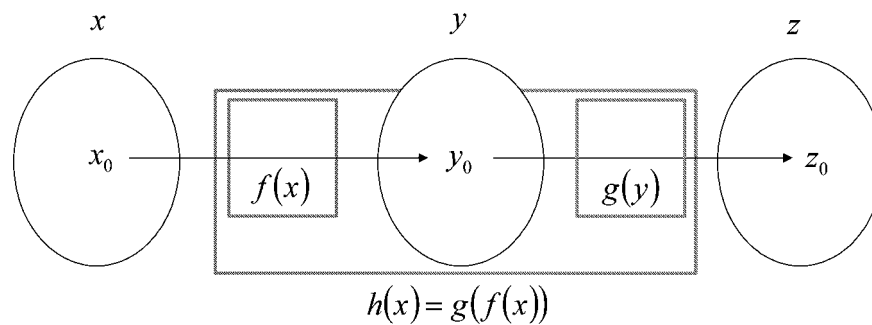


図4 合成関数

合成関数の例

- $h(x) = (x^2 - 4x + 2)^2$
これは、 $f(x) = x^2 - 4x + 2$ と $g(y) = y^2$ というふたつの関数を合成したものと考えることができます.
- $h(x) = \sqrt{x^3 + 2x^2 - 5}$
この関数は、 $f(x) = x^3 + 2x^2 - 5$ と $g(y) = \sqrt{y}$ というふたつの関数の合成と見るができます.

合成関数の微分には、次のような便利な法則が適用できることが証明されています。

$$\frac{dg(f(x))}{dx} = \frac{dg(y)}{dy} \frac{df(x)}{dx}$$

つまり、合成関数の微分は、内側の関数と外側の関数をそれぞれ個別に微分し、それらを掛け合わせることで得られるのです。

- $h(x) = (x^2 - 4x + 2)^2$
 $g(y) = y^2 \rightarrow \frac{dg(y)}{dy} = 2y$
 $f(x) = x^2 - 4x + 2 \rightarrow \frac{df(x)}{dx} = 2x - 4$
 $\Rightarrow \frac{dh(x)}{dx} = 2y \times (2x - 4) = 2(x^2 - 4x + 2)(2x - 4)$
- $h(x) = \sqrt{x^3 + 2x^2 - 5}$
 $g(y) = \sqrt{y} \rightarrow \frac{dg(y)}{dy} = \frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}$
 $f(x) = x^3 + 2x^2 - 5 \rightarrow \frac{df(x)}{dx} = 3x^2 + 4x$
 $\Rightarrow \frac{dh(x)}{dx} = \frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}} \times (3x^2 + 4x) = \frac{1}{2}(x^3 + 2x^2 - 5)^{-\frac{1}{2}}(3x^2 + 4x)$

3 関数の最大化・最小化

関数の中には、最大値あるいは最小値を持つものがあります。

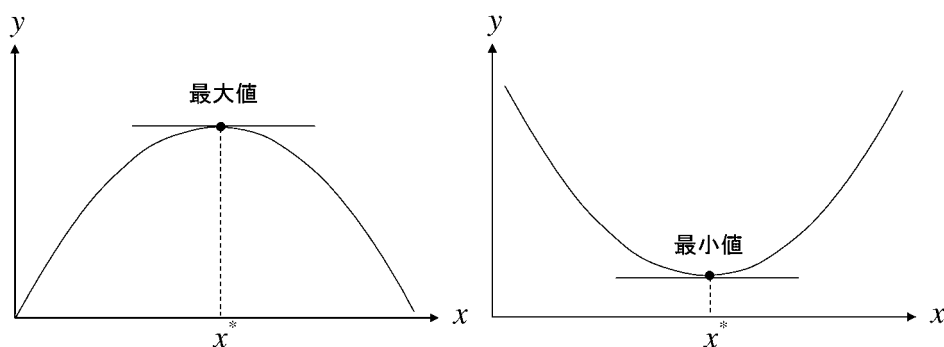


図5 関数の最大・最小

図5からわかるように、関数 $f(x)$ が $x = x^*$ で最大化あるいは最小化されているとき、接線の傾きはゼロ、すなわち微分係数はゼロになっています。

$$\frac{df(x^*)}{dx} = 0$$

この性質を逆手にとって、次のように考えることができます。すなわち、「微分係数がちょうどゼロになるような x において関数 $f(x)$ は最大化（最小化）される」と考えられます*1。これを利

*1 厳密には、これは最小化・最大化の「必要条件」（一階条件）です。すなわち、ある x がこの性質を満たしているからといって、それがただちに関数 $f(x)$ を最大化・最小化する点であるとは言えません。「十分条件」（二階条件）については、たとえば三土（1991）を参照してください。

用すれば、次のように関数 $f(x)$ を最大化（最小化）する x を求めることができます。例として、 $f(x) = 4x^2 - 16x + 5$ の最小値を求めてみましょう*2。

1. $f(x)$ を微分しゼロとおく。

$$df(x)/dx = 8x - 16 = 0$$

2. この方程式を解いて x を求める。

$$x = 2$$

したがって、 $x = 2$ で関数 $f(x)$ は最小化されるとわかります。そして、最小値は $f(2) = 4 \times 2^2 - 16 \times 2 + 5 = -11$ となります。

4 多変数関数

BMI（ボディ・マス・インデックス）という肥満度を測る指数があります。これは、ある個人について「体重」と「身長」のデータが与えられたとき計算されるものです。 x （体重）と y （身長）の組み合わせを z （BMI）に対応づけるような、「複数種類の要素をひとつの要素に対応付ける関数」も考えられます。

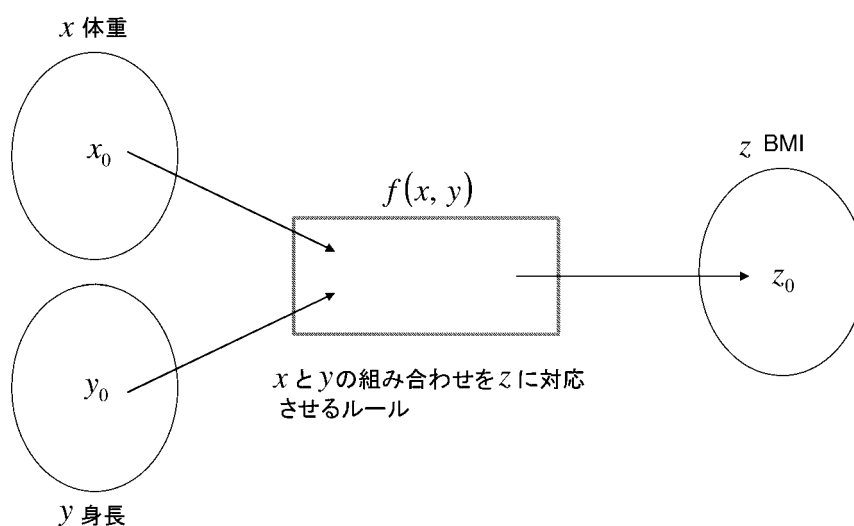


図6 他変数関数の例

このように、出先の変数が複数種類あるような関数を**多変数関数**と言い、“ $f(x, y)$ ”あるいは $z = f(x, y)$ と表記します。ちなみに、BMIは「体重÷身長÷身長」ですから、 $f(x, y) = x/y^2$ となります。

2変数関数を図示すると、図7のように x, y, z の3つの軸を持つ3次元空間上の“面”になります（中身はつまっていないことに注意）。

*2 $f(x) = ax^2 + bx + c$ において、 $f(x)$ は $a > 0$ ならば最小値を、 $a < 0$ ならば最大値を持ちます。

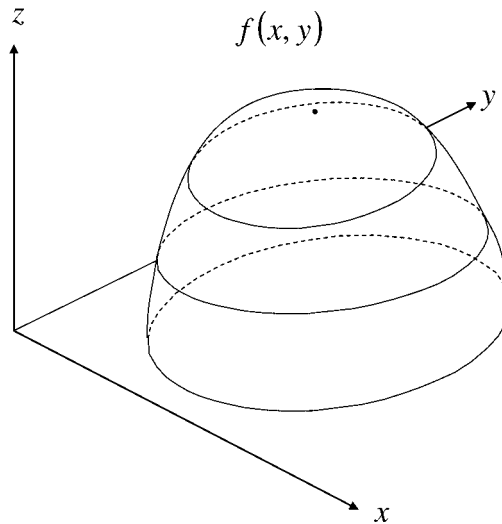


図7 2変数関数

5 多変数関数の微分

多変数関数の場合、**偏微分**という考え方を導入します。変数が複数あるので、ふたつの種類の微分を考えます。つまり、

- ① 身長 (y) を一定の値 (たとえば 160cm) に固定して体重 (x) のみをわずかに動かしたとき BMI (z) がどれだけ変化するか、と
- ② 体重 (x) を一定 (たとえば 55kg) に固定して身長 (y) のみをわずかに動かしたとき BMI (z) がどれだけ変化するか

のふたつです。このように、一方の変数を固定したまま他方の変数だけをわずかに動かしたとき、関数 $f(x, y)$ にしたがって z がどれだけ変化するかを見ることを、「偏微分する」と言います。

関数 $f(x, y)$ を x で偏微分するときは

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$$

y で偏微分するときは

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$$

と書きます。また、特定の x, y (たとえば x_0, y_0) における偏微分係数の値を表すときには、

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}, \quad \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=x_0, y=y_0}$$

などと表記します。一変数関数の微分のときに記号 d を用いたのに対し、多変数関数の偏微分では ∂ (ラウンドデルタ) を用います。

5.1 偏微分の視覚的理解

$x = x_0$ で $f(x, y)$ を切断してみましよう (図8)。

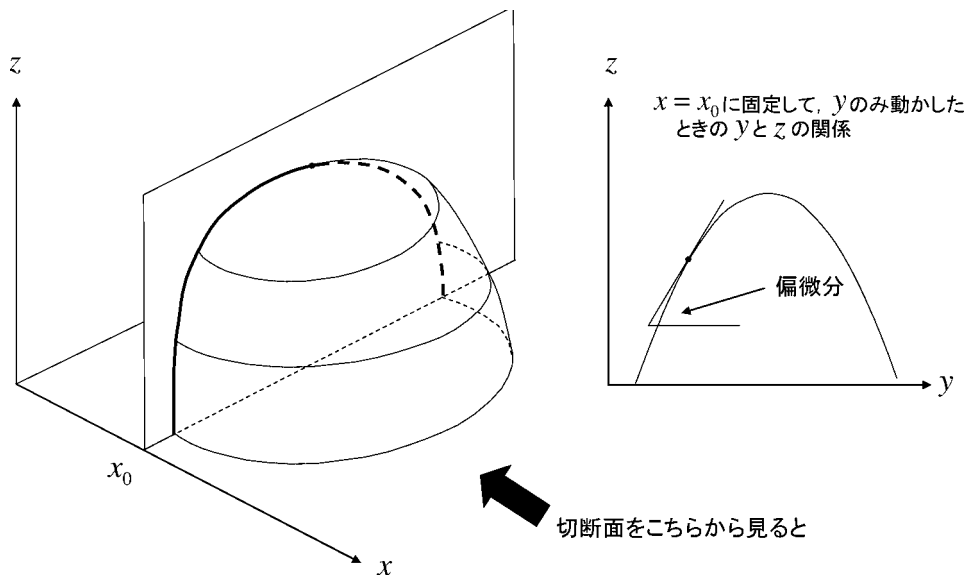


図8 偏微分

こうしてできる切断面の点は、すべて $x = x_0$ に対応しています。すなわち、この切断面は「 x を x_0 に固定したまま y のみを動かしたときの z の動き」を表すことになります。

したがって、この切断面上で「 y をわずかに動かしたときに z がどれだけ変化するか」を計算すれば、それが $x = x_0$ における y による偏微分係数ということになります。視覚的には、 $x = x_0$ でつくった切断面の接線の傾きが偏微分係数になるのです。

むしろ、任意の y のところで切断面をつかって接線の傾きを求めれば、 x による偏微分係数になります。

5.2 偏微分係数の計算

では、偏微分係数はどのように計算すればよいのでしょうか？

偏微分係数の計算は、一変数関数の微分係数の計算とほとんど同じです。唯一異なるのは、「動かさないほうの変数を定数とみなす」という点です。

例として、 $f(x, y) = x^2 + y^2 + 2xy$ を x について偏微分することを考えてみましょう。「 y は固定したまま」なわけですから、「4」や「2」などの「定数」と同じとみなします。大雑把に言ってしまうと、「 $x^2 + b + 2cx$ 」と考えて、 x で微分するわけです。

したがって、

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 2x + 2y$$

となります。

6 多変数関数の最大化・最小化

多変数関数にも、最大値あるいは最小値を持つものがあります。もし2変数関数 $f(x, y)$ が (x^*, y^*) で頂点になっているとしたら、① x 軸に沿って進めば x^* が頂点になっているし、② y 軸に沿って進めば y^* 頂点になっているはずですが、つまり、① $y = y^*$ で切断面をつくったとき、切断

面上では x_0 で接線の傾きがゼロになっているはずですが、同時に、② $x = x^*$ で切断面をつくったとき、切断面上では y_0 で接線の傾きがゼロになっているはずですが、すなわち、

$$\frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial x} = 0 \quad \text{かつ} \quad \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial y} = 0$$

が成立しているはずですが、したがって、この性質を逆手にとって以下のような手順で2変数関数を最大化（最小化）する x, y を求めることができます。

1. 関数 $f(x, y) = -x^2 - 2y^2 - 2xy - 2y$ の偏微分ゼロに等しいとおいて、連立方程式をたてる。これが、関数を最大化（最小化）する (x, y) が満たすべき条件である。

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} &= -2x - 2y = 0 \\ \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} &= -4y - 2x - 2 = 0 \end{aligned}$$

2. 連立方程式を解き、最大化（最小化）の条件を満たす (x, y) を求める。

$$\begin{cases} x &= 1 \\ y &= -1 \end{cases}$$

以上より、関数 $f(x, y) = -x^2 - 2y^2 - 2xy - y$ は $x = 1, y = -1$ において最大値 0 をとります。