2012年度 春 国際学基礎演習

担当 岩村 英之

2012年5月1日

数学によって記述されるモデルの例

1 モデルを数学で表現する

1. 登場人物
   (a) 消費者
   (b) 農家
   (c) 市場
2. インプット・アウトプットおよび行動原理
   (a) 消費者は,（a-1）りんごの価格,（a-2）みかんの価格，および（a-3）自らの所得を与えられ，**自らの満足度が最大になるように**（a-4）りんごおよび（a-5）みかんの購入量を決定する．
   (b) 農家は,（b-1）りんごの価格および（b-2）肥料の価格を与えられ，**利潤を最大にするよう**（b-3）りんごの生産量を決定する．
   (c) 「市場」は,（c-1）消費者の希望購入量と（c-2）農家の希望生産量を与えられ，両者が一致するよう,（c-3）りんごの価格を調整する．

これでは，モデルの定式化は不十分．思考実験から明確な結論を得るには，特に「行動原理」をより詳細に特定しなければならない．すなわち，各登場人物のインプットとアウトプットを関連付けるルール＝関数を特定しなければならない．そして，数学こそこの仕事をもっとも効率よくこなしてくれる．

消費者

りんごの価格 P_A，みかんの価格 P_O，所得 I を与えられ，効用 $(C_A)^\alpha (C_O)^{1-\alpha}$ を最大にするよう，りんごの購入量 C_A およびみかんの購入量 C_O を決定する．

$$\begin{array}{cc} \max\limits_{x_A, x_O} & (C_A)^\alpha (C_O)^{1-\alpha} \\ s.t & P_A C_A + P_O C_O = I \end{array}$$

ただし，$0 < \alpha < 1$ とする．

この問題を「解く」ことで，消費者にとっての P_A, P_O, I と C_A, C_O の関係を導出することができる．具体的には，まず予算制約式を C_O について解いて，

$$C_O = \frac{I}{P_O} - \frac{P_A C_A}{P_O}$$

効用関数に代入する．

$$U = (C_A)^\alpha \left(\frac{I}{P_O} - \frac{P_A C_A}{P_O} \right)^{1-\alpha}$$

これで，効用が C_A のみの関数になったので，C_A について微分してゼロとおけば，効用を最大にするようなリンゴの購入量を求めることができる．ここでは，**積の微分の公式**と**合成関数の微分の公式**を順に適用する．

$$
\begin{aligned}
\frac{dU}{dC_A} &= \alpha C_A^{\alpha-1}\left(\frac{I}{P_O}-\frac{P_AC_A}{P_O}\right)^{1-\alpha}+C_A^{\alpha}(1-\alpha)\left(\frac{I}{P_O}-\frac{P_AC_A}{P_O}\right)^{1-\alpha-1}\times\left(-\frac{P_A}{P_O}\right)\\
&= \alpha C_A^{\alpha}C_A^{-1}\left(\frac{I}{P_O}-\frac{P_AC_A}{P_O}\right)^{1-\alpha}-(1-\alpha)C_A^{\alpha}\left(\frac{I}{P_O}-\frac{P_AC_A}{P_O}\right)^{1-\alpha}\left(\frac{I}{P_O}-\frac{P_AC_A}{P_O}\right)^{-1}\left(\frac{P_A}{P_O}\right)\\
&= \left[\alpha C_A^{-1}-(1-\alpha)\left(\frac{I}{P_O}-\frac{P_AC_A}{P_O}\right)^{-1}\left(-\frac{P_A}{P_O}\right)\right]C_A^{\alpha}\left(\frac{I}{P_O}-\frac{P_AC_A}{P_O}\right)^{1-\alpha}
\end{aligned}
$$

効用が最大になるような C_A においては，$dU/dC_A=0$ となっていなければならない．逆に言えば，効用を最大化する消費者は $dU/dC_A=0$ となるような C_A を選択するはずである．

$$
\left[\alpha C_A^{-1}-(1-\alpha)\left(\frac{I}{P_O}-\frac{P_AC_A}{P_O}\right)^{-1}\left(\frac{P_A}{P_O}\right)\right]C_A^{\alpha}\left(\frac{I}{P_O}-\frac{P_AC_A}{P_O}\right)^{1-\alpha}=0
$$

これを C_A について解くと，次のようになる．

$$
\begin{aligned}
\alpha C_A^{-1}-(1-\alpha)\left(\frac{I}{P_O}-\frac{P_AC_A}{P_O}\right)^{-1}\left(\frac{P_A}{P_O}\right) &= 0\\
\alpha C_A^{-1} &= (1-\alpha)\left(\frac{I}{P_O}-\frac{P_AC_A}{P_O}\right)^{-1}\left(\frac{P_A}{P_O}\right)\\
\alpha^{-1}C_A &= (1-\alpha)^{-1}\left(\frac{I}{P_O}-\frac{P_AC_A}{P_O}\right)\left(\frac{P_A}{P_O}\right)^{-1}\\
\frac{1}{\alpha}C_A &= \frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{I}{P_O}-\frac{P_AC_A}{P_O}\right)\frac{P_O}{P_A}\\
\frac{1}{\alpha}C_A &= \frac{1}{1-\alpha}\frac{I}{P_A}-\frac{1}{1-\alpha}C_A\\
\frac{1}{\alpha}C_A+\frac{1}{1-\alpha}C_A &= \frac{1}{1-\alpha}\frac{I}{P_A}\\
\frac{C_A}{\alpha(1-\alpha)} &= \frac{1}{1-\alpha}\frac{I}{P_A}\\
C_A &= \frac{\alpha I}{P_A} \qquad (1)
\end{aligned}
$$

このように数学を用いることで，C_A（りんごの購入量）は I（所得）と P_A（りんごの価格）と α の関数として曖昧さのない形で表現することができる．

農家

農家はりんごの価格 P_A と肥料の価格 r を与えられ，利潤 $P_AX_A-r\times q$ を最大にするよう，りんごの生産量 X_A と肥料の投入量 q を決定する．ただし，肥料の投入量とりんごの生産量の関係は生産関数 $X_A=r^{\beta}$ で与えられているとする（ただし，$0<\beta<1$）．

$$
\begin{aligned}
\max_{x_A,x_O}\quad & P_AX_A-r\times q\\
s.t\quad & X_A=r^{\beta}
\end{aligned}
$$

この問題を解くことで，農家にとっての P_A, r と X_A の関係を導出することができる．

まず，生産関数を q について解く．

$$r = (X_A)^{\frac{1}{\beta}}$$

次に，これを利潤関数に代入する．

$$\pi = P_A X_A - r \times (X_A)^{\frac{1}{\beta}}$$

利潤を X_A のみの関数として表すことができたので，X_A について微分してゼロとおけば，利潤を最大にするようなリンゴの購入量を求めることができる．

$$\begin{aligned}
\frac{d\pi}{dX_A} &= P_A - \frac{1}{\beta} r X_A^{\frac{1}{\beta}-1} \\
&= P_A - \frac{1}{\beta} r X_A^{\frac{1-\beta}{\beta}}
\end{aligned}$$

利潤が最大になるような X_A では $d\pi/dX_A = 0$ となっていなければならない．

$$\begin{aligned}
P_A - \frac{1}{\beta} r X_A^{\frac{1-\beta}{\beta}} &= 0 \\
\frac{1}{\beta} r X_A^{\frac{1-\beta}{\beta}} &= P_A \\
X_A^{\frac{1-\beta}{\beta}} &= \frac{\beta P_A}{r} \\
X_A &= \left(\frac{\beta P_A}{r}\right)^{\frac{\beta}{1-\beta}} \qquad (2)
\end{aligned}$$

これで，X_A（りんごの生産量）は P_A（りんごの価格）と r（肥料の価格）と β の関数として表現できた．

均衡

最後に，消費者および農家が（1）および（2）のような行動原理で行動するとき，社会全体はどのような状態に落ち着くだろうか．ある価格のもとで消費者の希望購入量と農家の希望生産量とが一致しなければ，両者は行動を変えてしまう．したがって，社会は最終的には両者が一致するような状態に落ち着くと考えられる．

$$\begin{aligned}
C_A &= X_A \\
\frac{\alpha I}{P_A} &= \left(\frac{\beta P_A}{r}\right)^{\frac{\beta}{1-\beta}}
\end{aligned}$$

この等式を満たす P_A こそ，りんご価格が最終的に到達する値である．等式を P_A について解いてみよう．

$$
\begin{aligned}
\frac{\alpha I}{P_A} &= \left(\frac{\beta P_A}{r}\right)^{\frac{\beta}{1-\beta}} \\
\alpha I P_A^{-1} &= \left(\frac{\beta}{r}\right)^{\frac{\beta}{1-\beta}} P_A^{\frac{\beta}{1-\beta}} \\
\alpha I \left(\frac{\beta}{r}\right)^{\frac{1-\beta}{\beta}} &= P_A^{-1} P_A^{\frac{\beta}{1-\beta}} \\
\alpha I \left(\frac{\beta}{r}\right)^{\frac{1-\beta}{\beta}} &= P_A^{-\frac{1}{1-\beta}} \\
P_A &= (\alpha I)^{-\frac{1-\beta}{\beta}} \left(\frac{\beta}{r}\right)^{-\frac{1}{\beta}} \qquad (3)
\end{aligned}
$$

最後の式を見れば，価格がどのような水準に決まるのか（均衡価格）がわかる．さらに，均衡価格がモデルのどのような要因に**どのように影響を受けるのか**も，かなり明快に導くことが可能である．

2 モデルを動かす：比較静学

重要なことは，モデルに衝撃を加えて価格がどう変化するのかを「思考実験」することである．より厳密な言い方をすれば,「実験」とは外生変数の変化が内生変数の均衡値にどう影響するかを見ることである．すでに求めたように，りんご価格の均衡値は3のように外生変数 I および r の関数として与えられている．したがって，これを I あるいは r で微分（正確には**偏**微分）すれば，思考実験の結果を得ることができる．

(1) 消費者の所得の変化がりんご価格に及ぼす影響

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial P_A}{\partial I} &= -\frac{1-\beta}{\beta} \alpha^{-\frac{1-\beta}{\beta}} I^{-\frac{1-\beta}{\beta}-1} \left(\frac{\beta}{r}\right)^{-\frac{1}{\beta}} \\
&= -\frac{1-\beta}{\beta} \alpha^{-\frac{1-\beta}{\beta}} I^{-\frac{1}{\beta}} \left(\frac{\beta}{r}\right)^{-\frac{1}{\beta}}
\end{aligned}
$$

最初の仮定 $0 < \beta < 1$ および $0 < \alpha < 1$ より，この微分係数の符号は正になる．すなわち，人々の所得が増加すればりんご価格は上昇することになる．

(2) 肥料価格の変化がりんご価格に及ぼす影響

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial P_A}{\partial r} &= (\alpha I)^{-\frac{1-\beta}{\beta}} \beta^{-\frac{1}{\beta}} \frac{1}{\beta} r^{\frac{1}{\beta}-1} \\
&= (\alpha I)^{-\frac{1-\beta}{\beta}} \beta^{-\frac{1}{\beta}} \beta^{-1} r^{\frac{1-\beta}{\beta}} \\
&= (\alpha I)^{-\frac{1-\beta}{\beta}} \beta^{-\frac{1-\beta}{\beta}} r^{\frac{1-\beta}{\beta}} \\
&= (\alpha \beta I)^{-\frac{1-\beta}{\beta}} r^{\frac{1-\beta}{\beta}}
\end{aligned}
$$

最初の仮定 $0 < \beta < 1$ および $0 < \alpha < 1$ より，この微分係数の符号は正になる．すなわち，肥料価格が上昇すればりんご価格は上昇することになる．

3　まとめ：数理モデルの効能

須賀（2008），志田（2005）および数土（2005）を参考に，数学によって記述されるモデルのメリットをまとめておくと，以下のようになる[1].

1. 記述の効率性
   - モデルを詳細に特定することが可能となる．
   - モデルの共有が容易になり，意味のある議論が可能となる．モデルが厳密に提示されない場合，提示される仮説の背後にある仮定・前提を聞き手が探らなければならない．
2. 論理の厳密性
   - 推論は数学的な論理演繹によってほぼ機械的に導出され，意識的・無意識的な「飛躍」の入り込む余地がない．
3. 論理の発見
   - 数学的な論理演繹の到達距離は，言葉や図で考察可能な範囲を大きく超える．言葉や図によるモデルからは導出できない仮説を「発見」する可能性がある．(例：アローの一般不可能性定理)
   - 反対に，言葉や図によるモデルで提示された仮説が，数理モデルでは成立しないことが確認されることもあり得るだろう．

第１回・第２回の参考文献

[1] 志田基与師（2005)，「数理社会学の可能性と限界」，数土直紀・今田高俊編『数理社会学入門』，pp.27-49，勁草書房.

[2] 清水和己，河野勝（2008)，「政治経済学方法論のために」，清水・河野編『入門 政治経済学方法論』，pp.1-46，東洋経済新報社.

[3] 須賀晃一（2008)，「数理モデルの方法：論理性の追求」，清水・河野編，pp.119-144，東洋経済新報社.

[4] 数土直紀（2005)，「これからはじめなければいけないこと」，数土直紀・今田高俊編『数理社会学入門』，pp.211-226，勁草書房.

[1]数学を用いるか否かにかかわらず，モデル一般を用いることのメリットについては第１回で説明済み.